ECOLES NORMALES SUPERIEURES ULM-SEVRES

Groupe A

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Durée: 4 h

On désigne par **C** le corps des nombres complexes et par **R** celui des nombres réels; pour certaines parties du problème, **C** est identifié à $\mathbf{R}^2$ par l'application $x + iy \longrightarrow (x, y)$, dans laquelle i désigne une racine carrée de -1 qui a été fixée pour tout le problème. Pour toutes les notions de différentiabilité, le corps de base est supposé être **R**.

On utilisera sans démonstration le fait que si g est une fonction continue sur le produit $\mathrm{I} \times \mathrm{J}$ de deux segments de **R**, alors

$$\int_{\mathrm{J}} dy \int_{\mathrm{I}} g(x, y)\, dx = \int_{\mathrm{I}} dx \int_{\mathrm{J}} g(x, y)\, dy \ ,$$

et que si de plus g est nulle en dehors d'une boule de centre (x_0, y_0) et de rayon ρ contenue dans $\mathrm{I} \times \mathrm{J}$, les intégrales qui précèdent sont encore égales à

$$\int_0^{\rho} r\, dr \int_0^{2\pi} g(x_0 + r\cos\theta \ , \ y_0 + r\sin\theta)\, d\theta \ .$$

On dira qu'une fonction numérique ou vectorielle définie sur un intervalle de **R** est de classe $\mathcal{C}^k$ si elle possède une k-ième dérivée continue sur cet intervalle; si l'intervalle de définition contient l'une de ses extrémités, chaque dérivée doit être prise à droite ou à gauche suivant le cas.

I

1° On désigne par d un nombre réel strictement positif et on considère une fonction u de classe $\mathcal{C}^3$ définie sur $[-1-d\ ,\ 1+d]$ et à valeurs dans **C**. Montrer qu'il existe une application U, possédant des dérivées

Tournez la page S. V. P.

partielles continues, de $[-1-d,\ 1+d] \times \mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ telle que l'on ait, pour tout point x de $[-1-d,\ 1+d]$ et tout nombre réel y, les relations

$$U(x,\ 0) = u(x),$$

et

$$\left| \frac{\partial U}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) \right| \leqslant C_1 |\ y\ |^2 ,$$

où C_1 est une constante appropriée; on pourra chercher U sous la forme $(x,\ y) \longrightarrow u(x) + y\, v(x) + y^2 w(x)$.

2° Trouver une fonction réelle φ continûment dérivable sur $\mathbf{R}$ telle que

$$\varphi(\xi) = 0 \quad \text{pour} \quad \xi \leqslant 0, \qquad \varphi(\xi) = 1 \quad \text{pour} \quad \xi \geqslant 1$$
$$\text{et} \quad 0 \leqslant \varphi(\xi) \leqslant 1 \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant \xi \leqslant 1.$$

On fixe un point x_0 de $[-1,\ 1]$; pour tout nombre réel α de $]0,\ d]$, on définit une application φ_α de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ par

$$\varphi_\alpha(x,\ y) = \varphi\left(\frac{2}{\alpha}\, r(x - x_0,\ y) - 1\right)$$

où

$$r(\xi,\ \eta) = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} .$$

Montrer que φ_α est continûment différentiable,

$$\text{que} \quad \varphi_\alpha(x,\ y) = 0 \quad \text{pour} \quad r(x - x_0,\ y) \leqslant \frac{\alpha}{2}$$
$$\text{et que} \quad \varphi_\alpha(x,\ y) = 1 \quad \text{pour} \quad r(x - x_0,\ y) \geqslant \alpha.$$

Montrer que l'application G_α de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{C}$ définie par

$$G_\alpha(x,\ y) = \left[\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x}(x,\ y) + i \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial y}(x,\ y)\right] (x - x_0 + iy)^{-1}$$

est continue et que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-d}^{d} dy \int_{-1-d}^{1+d} G_\alpha(x,\ y)\, dx = 1 .$$

En déduire que si

$$I_\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_{-d}^{d} dy \int_{-1-d}^{1+d} U(x,\ y)\, G_\alpha(x,\ y)\, dx ,$$

alors I_α tend vers $u(x_0)$ lorsque α tend vers zéro par valeurs strictement positives; montrer que cette convergence est uniforme lorsque x_0 reste dans $[-1,\ 1]$.

3° On définit une application ψ_α de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ par

$$\psi_\alpha(x,\ y) = \varkappa(x) + \chi(y) - \varkappa(x)\, \chi(y)$$

où

$$\varkappa(x) = \varphi\left(\frac{2}{\alpha}(|\ x\ | - 1) - 1\right) \qquad \text{et} \qquad \chi(y) = \varphi\left(\frac{2}{\alpha}\, |\ y\ | - 1\right) ;$$

montrer que ψ_α est continûment différentiable, que

$$\psi_\alpha(x,\ y) = 0 \quad \text{pour} \quad |\ x\ | \leqslant 1 + \frac{\alpha}{2} ,\ |\ y\ | \leqslant \frac{\alpha}{2}$$

et que $\psi_\alpha(x,\ y) = 1$ pour $|\ x\ | \geqslant 1 + \alpha$ ou $|\ y\ | \geqslant \alpha$. On pose

$$J_\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_{-d}^{d} dy \int_{-1-d}^{1+d} U(x,\ y) \left[\frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x}(x,\ y) + i \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial y}(x,\ y)\right] (x - x_0 + iy)^{-1}\, dx .$$

Montrer que si on définit une application H_α de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{C}$ par

$$H_\alpha(x,\ y) = [\varphi_\alpha(x,\ y) - \psi_\alpha(x,\ y)]\ \ (x - x_0 + iy)^{-1},$$

alors

$$J_\alpha - I_\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_{-d}^{d} dy \int_{-1-d}^{1+d} H_\alpha(x,\ y) \left[\frac{\partial U}{\partial x}(x,\ y) + i \frac{\partial U}{\partial y}(x,\ y)\right] dx ,$$

puis que $|J_\alpha - I_\alpha| \leqslant C_2 \alpha$ pour une constante C_2 convenable. Montrer que lorsque α tend vers zéro par valeurs strictement positives, alors J_α tend vers $u(x_0)$ uniformément par rapport à x_0 lorsque x_0 reste dans $[-1,\ +1]$.

II

On désigne par f une application injective de classe $\mathcal{C}^1$ d'un intervalle $[a,\ b]$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ telle que $f'(t) \neq 0$ quel que soit $t \in [a,\ b]$ et on désigne par K l'image de $[a,\ b]$ par f.

1° Montrer qu'il existe un nombre réel strictement positif d et une application de classe $\mathcal{C}^3$ de $[a-d,\ b+d]$ dans $\mathbf{C}$ prolongeant f; on désigne encore par f l'un de ces prolongements. Montrer que l'on peut choisir d de façon que $f'(t) \neq 0$ pour $t \in [a-d,\ b+d]$.

2° On définit une application F de $[a-d,\ b+d] \times \mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ par

$$F(t,\ s) = f(t) + i s f'(t).$$

Montrer que l'on peut choisir d de façon que F soit injective sur

$$[a-d,\ b+d] \times [-d,\ d].$$

3° Montrer qu'il est encore possible de choisir d de façon que F définisse un $\mathcal{C}^3$-difféomorphisme de $]a-d,\ b+d[\times]-d,\ d[$ sur un voisinage ouvert V de K et trouver alors une application σ de classe $\mathcal{C}^3$ de V dans $\mathbf{R}$ s'annulant en tout point de K et dont la différentielle ne s'annule en aucun point de K.

III

On conserve les notations de la partie II en ce qui concerne notamment les applications F, σ et les ensembles K, V; on considère maintenant une application $\tilde{u}$ de classe $\mathcal{C}^3$ de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$.

1° Montrer qu'il existe une application $\tilde{U}$ de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur un voisinage ouvert W de K contenu dans V et à valeurs dans $\mathbf{C}$ telle que pour une constante C convenable :

$$\left| \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x}(x+iy) + i \frac{\partial \tilde{U}}{\partial y}(x+iy) \right| \leqslant C\, \sigma^2(x+iy)\ ,$$

et que $\tilde{U}(z) = \tilde{u}(z)$ pour tout $z \in K$.

2° On suppose que $a = -1$, $b = 1$ et on considère la fonction ψ_α introduite dans I, 3°. Montrer que, pour α assez petit, la fonction $\zeta_\alpha = \psi_\alpha \circ F^{-1}$, prolongée par 1 hors de V, est continûment différentiable sur $\mathbf{C}$. Montrer en s'inspirant de la méthode suivie dans I que si, pour $z_0 \in K$, on pose

$$\tilde{J}_\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{U}(x,\ y) \left[\frac{\partial \zeta_\alpha}{\partial x}(x+iy) + i \frac{\partial \zeta_\alpha}{\partial y}(x+iy) \right] (x+iy-z_0)^{-1}\, dx\ ,$$

alors, lorsque α tend vers zéro par valeurs strictement positives, $\tilde{J}_\alpha$ tend vers $\tilde{u}(z_0)$ et que cette convergence est uniforme par rapport à z_0.

3° On désigne par E l'espace vectoriel réel des fonctions numériques complexes continues sur K, muni de la norme

$$g \longmapsto \| g \| = \sup_{z \in K} | g(z) |\ ,$$

et par E_1 l'adhérence dans E du sous-espace vectoriel engendré par les fonctions constantes et les fonctions $z \longmapsto z^n$ et $z \longmapsto iz^n$, où n parcourt l'ensemble des entiers strictement positifs.

Montrer que deux points quelconques de $\complement K$ peuvent être joints par un arc paramétré contenu dans $\complement K$ et en déduire que pour tout point z_1 de $\complement K$ la fonction $z \longmapsto (z - z_1)^{-1}$ appartient à E_1. Montrer en utilisant la question III, 2° que la restriction de $\tilde{u}$ à K appartient à E_1.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail